Curso 2013-2014

LÓGICA – Examen de recuperación de lógica de primer orden **13-01-2014**

1.1. Formalizar en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados: *(2,5 puntos)*

a) Ningún amigo de Pedro es profesor. (A(x,y) ≡ x es amigo de y, P(x) ≡ x es profesor)
b) Sólo los amigos de Juan imparten clase de historia. (A(x,y)≡ x es amigo de y, I(x,y) ≡ x imparte clase de la materia y)
c) Todos los enemigos de Pedro imparten clase de historia. (A(x,y)≡ x es amigo de y, I(x,y) ≡ x imparte clase de la materia y)

a) *a ≡ Pedro* $\neg \exists x\,(A(x,a) \wedge P(x))$

o bien

$\forall x\,(A(x,a) \rightarrow \neg P(x))$

b) *a ≡ Pedro* *b ≡ Historia*

$\forall x\,(I(x,b) \rightarrow A(x,a))$

o bien

$\neg \exists x\,(I(x,b) \wedge \neg A(x,a))$

c) *a ≡ Pedro* *b ≡ Historia* $\forall x\,(\neg A(x,a) \rightarrow I(x,b))$

1.2. Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (umg) detallando el proceso de obtención del umg. (Nota: *x, y, z,* son símbolos de variable, y *a, b* son símbolos de constante).

a) P(g(z), h(y,z), a), P(g(y), h(f(x),z), x)
b) P(x, y, f(y)), P(f(y), g(b), f(a))

<table>
<tr><th>Discordancia</th><th>Ligadura</th><th>Sustitución</th><th>Fórmulas resultantes de aplicar la sustitución</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>P(g(z), h(y,z), a)</td></tr>
<tr><td>P(g(y), h(f(x),z), x)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">{z, y }</td><td rowspan="2">z/y</td><td rowspan="2">{ z/y }</td><td>P(g(y), h(y,y), a)</td></tr>
<tr><td>P(g(y), h(f(x),y), x)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">{y, f(x) }</td><td rowspan="2">y/f(x)</td><td rowspan="2">{ z/f(x), y/f(x) }</td><td>P(g(f(x)), h(f(x), f(x)), a)</td></tr>
<tr><td>P(g(f(x)), h(f(x), f(x)), x)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">{a, x }</td><td rowspan="2">x/a</td><td rowspan="2">{ z/f(a), y/f(a), x/a }</td><td>P(g(f(a)), h(f(a), f(a)), a)</td></tr>
<tr><td>P(g(f(a)), h(f(a), f(a)), a)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Discordancia</th><th>Ligadura</th><th>Sustitución</th><th colspan="2">Fórmulas resultantes de aplicar la sustitución</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>P(x, y, f(y))</td><td>P(f(y), g(b), f(a))</td></tr>
<tr><td>{ x, f(y) }</td><td>x/f(y)</td><td>{ x/f(y) }</td><td>P(f(y), y, f(y))</td><td>P(f(y), g(b), f(a))</td></tr>
<tr><td>{ y, g(b) }</td><td>y/g(b)</td><td>{ x/f(g(b)), y/g(b) }</td><td>P(f(g(b)), g(b), f(g(b)))</td><td>P(f(g(b)), g(b), f(a))</td></tr>
<tr><td>{ g(b), a }</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2. Demostrar con análisis semántico la siguiente relación de consecuencia lógica:

$$\exists x\, (\neg P(x) \wedge Q(x)) \quad \vDash \quad \neg\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$$ *(2,5 puntos)*

Suponemos que un interpretación i es un modelo de $\exists x\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$ o sea

$$i\, (\exists x\, (\neg P(x) \wedge Q(x))) = V$$

=> $i(\exists x\, (\neg P(x) \wedge Q(x)))\{x/a\} = V$ para al menos una constante a
=> $i(\neg P(a) \wedge Q(a)) = V$
=> $i(Q(a)) = V$, $i(P(a) = F$
=> $i(Q(a) \rightarrow P(a)) = F$
=>no para cada constante a, $i(Q(x) \rightarrow P(x))\{x/a\}) = V$
=> $i(\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))) = F$
=> $i(\neg\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))) = V$.

Entonces cada modelo de $\forall x\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$ es un modelo de $\neg\forall x\, (Q(x) \rightarrow P(x))$, demostrando la relación de consecuencia lógica.

3. Demostrar mediante deducción natural, justificando cada paso y <u>utilizando como mucho una regla derivada en un único paso de la demostración</u>:

$$T [\forall x \forall y(P(y) \rightarrow Q(x, y)) , \forall x(R(x, a) \rightarrow \neg Q(x, b)) , \exists z R(z, a)] \vdash \neg P(b)$$ *(2,5 puntos)*

1.	$\forall x \forall y(P(y) \rightarrow Q(x, y))$	prem.
2.	$\forall x(R(x, a) \rightarrow \neg Q(x, b))$	prem.
3.	$\exists z R(z,a)$	prem.
4.	$R(c^*,a)$	elim. $\exists$, 3
5.	$R(c^*,a) \rightarrow \neg Q(c^*,b)$	elim. $\forall$, 2
6.	$\neg Q(c^*, b)$	elim. $\rightarrow$, 4,5
7.	$\forall y(P(y) \rightarrow Q(c^*, y))$	elim. $\forall$, 1
8.	$P(b) \rightarrow Q(c^*, b)$	elim. $\forall$, 7
9.	$\neg P(b)$	MT 6,8

4. Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante resolución con UMG, indicando en cada paso el unificador empleado: *(2,5 puntos)*

C1: ¬Q(x) v P(x) v P(f(a))
C2: ¬P(x) v ¬S(x,x)
C3: ¬P(x) v R(b,x) v S(b, x)
C4: ¬T(x,y) v ¬S(y,x)
C5: ¬R(b,f(a))
C6: S(f(x),x)
C7: T(f(a),b)
C8: Q(f(x))

R1: ¬S(b,f(a))	C4 con C7 y UMG {x/f(a), y/b}
R2: ¬P(f(a)) v R(b, f(a))	R1 con C3 y UMG {x/f(a)}
R3: ¬P(f(a))	R2 con C5
R4: ¬Q(x) v P(x)	R3 con C1
R6: ¬Q(f(a))	R4 con R3 y UMG {x/f(a)}
R7: □	R6 con C8 y UMG {x/a}

Otros soluciones posibles: factorización en C1 y después C8, C3, C6, C4 y C7 etc.